PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats qu'une attention particulière doit être portée à la rédaction des réponses. Ils s'efforceront d'énoncer de façon correcte et complète les lemmes, les propositions, ou théorèmes utilisés en faisant apparaître clairement les hypothèses et conclusions.

On pourra utiliser le résultat suivant :

On dit qu'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m > N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1] : |g_m(x) - g_{m+p}(x)| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, cette suite converge uniformément vers une fonction g continue, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall m > N, \quad \forall x \in [0, 1] : |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

PREMIÈRE PARTIE

On note I l'intervalle [0, 1], $\mathring{I}$ l'intervalle]0, 1[. Soit G la fonction définie sur I × I à valeurs réelles par :

$$G(x, t) = \begin{cases} t(1 - x) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1 \\ (1 - t)x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur I à valeurs réelles. Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$: on pose, pour tout x de I :

$$v(x) = \int_0^1 G(x, t) f(t)\, dt.$$

Question 1 :

Prouver que pour tout x dans I :

$$v(x) = (1 - x) \int_0^x t f(t)\, dt + x \int_x^1 (1 - t) f(t)\, dt.$$

Question 2 :

1° Montrez que la fonction v, qui, à tout x de I, associe le réel $v(x)$ est un élément de $\mathcal{C}(I)$.

Montrez que cette fonction est deux fois continûment dérivable et vérifie :

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x) & \text{pour tout } x \text{ dans } \mathring{I} \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

2° Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$; trouver une fonction $\overline{G}$ définie sur $[a, b] \times [a, b]$, à valeurs réelles, telle que pour toute fonction r définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles, deux fois continûment dérivable et nulle en a et en b, on ait :

$$r(x) = -\int_a^b \overline{G}(x, t) r''(t)\, dt \quad \text{pour } x \text{ dans } [a, b].$$

Question 3 : (Les résultats de cette question ne seront pas utilisés dans la suite).

Calculez $v\left(\frac{1}{2}\right)$ dans les deux cas suivants :

1° $f(t) = \sin k\pi t \quad (k \in \mathbb{N})$.

.../...

$2^\circ\ f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$.

Soit F une fonction définie sur $I \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles satisfaisant à :

a. F est continue sur $I \times \mathbb{R}$.

b. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(t, z)$ existe pour tout élément (t, z) de $I \times \mathbb{R}$ et pour chaque t dans I, la fonction $z \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial z}(t, z)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c. Il existe une constante positive L, telle que :

(c_1) $\qquad L < 8$

(c_2) $\qquad \left|\dfrac{\partial F}{\partial z}(t, z)\right| \leqslant L$ pour tout (t, z) de $I \times \mathbb{R}$.

Question 4 :

Montrez que pour tout t dans I et tout couple (z_1, z_2) de nombres réels :

$$|F(t, z_1) - F(t, z_2)| \leqslant L\,|z_1 - z_2|.$$

Soit u_0 un élément de $\mathcal{C}(I)$; on définit la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_n(x) = \int_0^1 G(x, t)\ \ F(t, u_{n-1}(t))\, dt \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Question 5 :

1° Calculez les nombres m et $\overline{m}$ définis par :

$$m = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 |G(x, t)|\, dt$$

$$\overline{m} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b |\overline{G}(x, t)|\, dt.$$

2° Montrez que pour chaque n de $\mathbb{N}$, l'application :

$x \longmapsto u_n(x)$ appartient à $\mathcal{C}(I)$.

Deuxième partie

Question 6 :

1° Montrez que pour tout x dans I et tout entier n, $n \geqslant 2$:

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leqslant \frac{L}{8} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)|.$$

2° Montrez que pour tout x dans I et tout entier n, $n \geqslant 1$:

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leqslant \frac{L^{n-1}}{8^{n-1}} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_1(t) - u_0(t)|.$$

3° Montrez que pour tout x dans I et tous entiers p et m :

$$|u_{m+p}(x) - u_m(x)| \leqslant \frac{L^m}{8^m} \frac{1}{1 - \dfrac{L}{8}} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_1(t) - u_0(t)|.$$

(On pourra remarquer que :

$$|u_{m+p}(x) - u_m(x)| \leqslant |u_{m+p}(x) - u_{m+p-1}(x)| + |u_{m+p-1}(x) - u_{m+p-2}(x)| + \ldots + |u_{m+1}(x) - u_m(x)|).$$

Question 7 :

1° Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme, et qu'elle converge uniformément vers une fonction u de $\mathcal{C}(I)$.

. . . /. . .

2° Montrez que pour tout t dans I et n dans $\mathbb{N}$:

$$|F(t, u(t)) - F(t, u_n(t))| \leqslant L|u(t) - u_n(t)|.$$

3° En déduire que :

$$u(x) = \int_0^1 G(x, t) F(t, u(t)) \, dt$$

et que

$$\begin{cases} -u''(x) = F(x, u(x)) & \text{pour } x \text{ dans } I \\ \text{et } u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Question 8 :

Montrez qu'il existe une fonction w définie sur I, à valeurs réelles vérifiant

$$\begin{cases} -w''(x) = \cos(w(x)) & \text{pour } x \text{ dans } I \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases}$$

Troisième partie

Soit N un entier positif; on pose $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $t_i = ih$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1$.

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N+1}$, pour t élément de I par :

a. $f_0(t) = \text{Max}\left(\dfrac{t_1 - t}{t_1 - t_0}, 0\right)$.

b. $f_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} & \text{pour } t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i \\ \dfrac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} & \text{pour } t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1} \\ 0 & \text{pour } t \in I - [t_{i-1}, t_{i+1}] \end{cases}$

pour $i = 1, 2, \ldots, N$.

c. $f_{N+1}(t) = \text{Max}\left(\dfrac{t - t_N}{t_{N+1} - t_N}, 0\right)$.

On pose :

$F(t, z) = \cos z$ pour tout t dans I et z dans $\mathbb{R}$

$u_0(x) = 0$ pour $x \in I$

$\bar{u}_0(x) = 0$ pour $x \in I$

$$\bar{u}_n(x) = \int_0^1 G(x, t) \left[\sum_{i=0}^{i=N+1} f_i(t) F(t_i, \bar{u}_{n-1}(t_i)) \right] dt$$

pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant 1$.

Question 9 :

1° Représentez graphiquement les fonctions f_i pour

$$0 \leqslant i \leqslant N + 1.$$

2° Montrez que pour x dans I :

$$f_i(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{i=N+1} f_i(x) = 1.$$

Question 10 :

On pose :

$$r_i(t) = F(t, u_n(t)) - f_i(t)\ F(t_i, u_n(t_i)) - f_{i+1}(t)\ F(t_{i+1}, u_n(t_{i+1}))$$

pour $i = 0, 1, \ldots, N$ et t dans $[t_i, t_{i+1}]$.

En utilisant la question 2.2°, montrez qu'il existe une fonction G_i de $[t_i, t_{i+1}] \times [t_i, t_{i+1}]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$r_i(x) = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} G_i(x, t)\, r_i''(t).$$

Montrez que : $|r_i(x)| \leqslant h \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |r_i''(t)|$.

Question 11 :

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| F(t, u_n(t)) - \sum_{i=0}^{i=N+1} f_i(t)\, F(t_i, u_n(t_i)) \right| \leqslant h \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{d^2}{dt^2} [\cos(u_n(t))] \right|.$$

Question 12 :

1° En utilisant la définition de u_n, montrez que :

$$|u_n'(x)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |u_n''(x)| \leqslant 1.$$

2° En déduire que :

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{d^2}{dt^2} \left[\cos(u_n(t)) \right] \right| \leqslant 2.$$

3° En utilisant les questions 4 et 9 prouvez que :

$$\left| \sum_{i=0}^{N+1} f_i(t)\, F(t_i, \bar{u}_n(t_i)) - \sum_{i=0}^{N+1} f_i(t)\, F(t_i, u_n(t_i)) \right| \leqslant L \sup_{t \in [0,1]} |\bar{u}_n(t) - u_n(t)|$$

4° Démontrer, par récurrence sur n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I,$$

$$|\bar{u}_n(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{L}{8}} Ch \qquad (\text{avec } C = 2 \text{ et } L = 1).$$

Quatrième partie

Question 13 :

Montrez que si w est la fonction de la question 8 et n un entier quelconque supérieur à 1, on a :

$$|w(x) - \bar{u}_n(x)| \leqslant \frac{L^n}{8^n} \frac{1}{1 - \frac{L}{8}} \operatorname*{Max}_{t \in [0,1]} |u_1(t) - u_0(t)| + \frac{Ch}{1 - \frac{L}{8}}.$$

Précisez une méthode de calcul pour évaluer la fonction w à 10^{-1} près et faites cette évaluation.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail